PROBLEMAS EBAU EXTREMADURA (2017-2020)

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

MARÍA TERESA BATALLA CALVÍN
Academia Biblos

Academia Biblos de Mayte Batalla

ÍNDICE

Estos problemas han sido resueltos por María Teresa Batalla Calvín, cualquier error o sugerencia podéis escribirme a ebau@academiabiblos.com.

Espero que os sirvan de ayuda para la preparación de la EBAU y para 2º de Bachillerato.

Gracias Carlos

1 PROGRAMACIÓN LINEAL

1.1 Junio 2017

Una industria de productos lácteos produce crema de queso de oveja en envases de dos tamaños: pequeño de 100 gramos con un beneficio por envase de 0.50 euros y grande de 300 gramos con un beneficio par envase de 1.40 euros. Cada día dispone de 2400 kilogramos de crema de queso para envasar. Por razones de mercado el número de envases de 100 gramos producidos diariamente no puede ser mayor de 15000 y debe ser igual o superior al de envases de 300 gramos. Se pide, justificando las respuestas:

a) ¿Cuántos envases de cada tipo deben producirse diariamente para hacer máximos los beneficios?

b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos?

Solución

1.2 Julio 2017

Un taller de confección textil produce dos categorías de trajes: de señora y de caballero. Dispone de material para fabricar diariamente 850 trajes de señora y 650 trajes de caballero. Si tiene que fabricar diariamente como máximo 1000 unidades totales y el beneficio obtenido por cada traje de señora es de 150 euros y de 200 euros por traje de caballero se pide:

a) ¿Cuántos trajes de cada tipo han de fabricarse diariamente para hacer máximo el beneficio?

b) El valor de dicho beneficio

Solución

1.3 Junio 2018

Una empresa vinícola produce dos tipos de vino, blanco y tinto. Por razones de comercialización, el número de botellas de vino blanco debe ser inferior al número de botellas de vino tinto y el máximo de botellas totales producidas no puede ser superior a 60000. Además, a causa de la mala cosecha de uva no pueden producirse más de 40000 botellas de vino tinto ni más de 25000 de vino blanco. Sabiendo que el beneficio obtenido por cada botella de vino tinto es de 2.50 euros y de 3 euros por cada botella de vino blanco y que se vende toda la producción, se pide:

a) ¿Cuántas botellas de cada tipo han de producirse para hacer máximos los beneficios?

b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos?

Solución

1.4 Julio 2018

Con el fin de incentivar sus ventas, un vivero de árboles frutales ofrece dos tipos de lotes: el lote A formado por 1 limonero, 1 naranjo y 1 manzano y el lote B por 2 limoneros y 1 manzano. Cada lote A le produce un beneficio de 30 euros y cada lote B un beneficio de 40 euros. Sabiendo que dispone como máximo de 1600 limoneros, 800 naranjos y 1000 manzanos, se pide:

a) ¿Cuántos lotes de cada tipo han de ofrecer para hacer máximos los beneficios?

b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos?

Solución

1.5 Junio 2019

Una tienda de electrodomésticos desea adquirir, para su venta posterior, dos tipos de cocinas: vitrocerámicas y de inducción, disponiendo para ello de 3000 euros. Cada cocina vitrocerámica le cuesta 100 euros y cada cocina de inducción 200 euros. El almacén solo tiene espacio para un total de 20 cocinas. El beneficio obtenido por cada vitrocerámica es de 30 % de su precio de coste y el beneficio de cada cocina de inducción es del 25 % también sobre su precio de coste. Además, por razones de mercado el número de cocinas de inducción no puede ser superior a 12. Se pide determinar, justificando las respuestas:

a) ¿Cuántas cocinas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio?

b) ¿Cuál es el valor de dicho beneficio?

Solución

1.6 Julio 2019

Un taller industrial fabrica dos clases de motores A y B. Cada motor de clase A requiere 2 horas de montaje y 1 hora de reglaje, con un beneficio de 220 euros y cada motor de clase B, 3 horas de montaje y 1/2 hora de reglaje con un beneficio de 280 euros.

Si solo se dispone cada día de 300 horas para el montaje de motores y de 120 horas para su reglaje y el número de motores de la clase B no puede ser superior a 80, se pide, justificando las respuestas:

a) ¿Cuántos motores de cada clase se deben fabricar para obtener el máximo beneficio?

b) ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo?

Solución

1.7 Junio 2020

1.7.1 Problema 1

Una factoría de automóviles tiene pedidos de 180 turismos y 140 furgonetas para la próxima temporada. Dispone para ello de dos fábricas A y B. La fábrica A produce diariamente 6 turismos y 2 furgonetas con un coste diario de 30000 euros y la fábrica B 2 turismos y 2 furgonetas con un coste de 20000 euros cada día. ¿Cuántos días debe abrir cada fábrica para producir el pedido de la temporada con el mínimo coste? ¿Cuál es el valor de dicho coste mínimo? Justificar las respuestas.

Solución

1.7.2 Problema 2

Un apicultor hurdano tiene 900 botes de miel y 500 botes de polen con los que elabora dos lotes A y B que pone a la venta. Cada lote A contiene 2 botes de miel y 2 botes de polen con un beneficio de 15 euros y cada lote B 3 botes de miel y 1 bote de polen con un beneficio de 12 euros. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe organizar para que el beneficio sea máximo? Halla el valor de dicho beneficio máximo. Justificar las respuestas.

Solución

2 MATRICES

2.1 Junio 2017

Sean A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar las matrices inversas de A y de B

b) Comprobar que $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$

c) Hallar la matriz X que verifique A·X=B

Solución

2.2 Julio 2017

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a) Determinar si existen las matrices inversas de A y B. En caso afirmativo, calcularlas.

b) Resolver la ecuación matricial A·X+B=I

Solución

2.3 Junio 2018

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz X que verifique A·X - B= B·X + A

Solución

2.4 Julio 2018

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determina la matriz X Solución de la ecuación matricial $A \cdot X + A^2 = 2\,A$

b) Hallar la matriz inversa de A

Solución

2.5 Junio 2019

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valor del parámetro x no existe $(A \cdot B)^{-1}$

b) Hallar la matriz inversa de A·B para x=1

Solución

2.6 Julio 2019

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halla el valor de b para el que no existe la matriz inversa de A

b) Para b=1, hallar la matriz X que verifique que $A \cdot X = A^3 - I$

Solución

2.7 Junio 2020

2.7.1 Problema 1

Sean A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallar justificando la respuesta, las matrices X e Y que sean Solución del sistema de ecuaciones matriciales siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} -2X + Y = A + B \\ 5X + Y = A - 2B \end{array}\right\}$$

Solución

2.7.2 Problema 2

Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, el valor de x para el que se verifica $A^t = A^{-1}$, donde A^t es la matriz traspuesta de A y A^{-1} es la matriz inversa de A

Solución

3 FUNCIONES

3.1 Junio 2017

3.1.1 Opción A

El número de visitantes al Museo Nacional de Arte Romano de Mérida en horario de mañana viene dado por la función:

$$V(t) = A - 2310t + Bt^2, \ 8 \leq t \leq 13$$

donde V(t) denota el número de visitantes y t la hora (desde las 8 hasta las 13). Se sabe que el número máximo de visitantes se alcanza para t = 11 horas y que a las 12 horas el número de visitantes es 480. Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar las constantes A y B

b) Encontrar el número máximo de visitantes.

c) Determinar si la función V(t) / (t – 10) tiene alguna asíntota. En caso afirmativo, determínela.

Solución

3.1.2 Opción B

El número de empleados de una factoría de fabricación de automóviles varía a lo largo del año de acuerdo con la función:

$$N(t)= t^3 - 21\,t^2 + 99\,t + 1000\ ,\ 1 \leq t \leq 12$$

Siendo N el número de empleados y t los distintos meses del año. Se pide:

(a) ¿En qué meses del año se producen el máximo y el mínimo de empleados?

(b) Halla los valores de dichos máximo y mínimo.

(c) Representa de forma aproximada la función N(t) en dicho periodo.

Solución

3.2 Julio 2017

3.2.1 Opción A

En el estudio en un laboratorio del tratamiento con antibióticos frente a una bacteria. patógena durante 7 días, se ha encontrado que el número de bacterias vivas (en miles) a lo largo de estos 7 días ha variado de acuerdo con la función:

$$B(t)= -t^3 + 12t^2 - 36t + 80 \ , \ 1 \leq t \leq 7$$

Siendo B el número de bacterias vivas (en miles) y t el día de la realización del estudio. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar los días del estudio en los que se ha observado el número máximo y mínimo de bacterias vivas.

(b) Hallar los valores de dichos valores máximo y mínimo.

(c) Representar de forma aproximada la función B(t) a lo largo de los 7 días del estudio

Solución

3.2.2 Opción B

La demanda de un producto es función de su precio según la expresión:

$$D(x) = \begin{cases} Ax - x^2 & \text{si } 20 \leq x \leq 30 \\ 600 - Bx & \text{si } 30 < x \leq 60, \end{cases}$$

donde D denota la demanda en unidades y x el precio en euros. Se sabe que la demanda para x=30 es de 300 unidades y que la función es continua.

(a) Determinar las constantes A y B. Justificar las respuestas.

(b) Representar gráficamente la demanda en función de x.

(c) Comprobar si la función D(x) / (x-25) tiene alguna asíntota. Encontrarla en caso afirmativo. Justificar la respuesta.

Solución

3.3 Junio 2018

3.3.1 Opción A

El consumo medio anual de combustible (en litros) por vehículo en Estados Unidos desde 1960 a 2000 se modeliza con la función

$$F(t) = 0{,}025t^3 - At^2 + Bt + 654 \quad 0 \leq t \leq 40$$

donde F(t) es el número de litros y t el tiempo desde el año 1960. Se sabe que en el año 1970 (t=10) el consumo fue de 711.5 litros y en 1990 (t=30) el consumo fue de 526.5 litros.

(a) Determinar las constantes A y B. Justificar las respuestas

(b) Representar gráficamente el consumo medio de combustible en función del tiempo.

Solución

3.3.2 Opción B

Una empresa ha estimado que, al cabo de 10 años de funcionamiento, el balance de sus ingresos y gastos (en miles de euros), en función de los años transcurridos, ha sido el siguiente:

$$I(t) = -3t^2+62t, \; 0 \leq t \leq 10$$

$$G(t)= t^2-10t+ 120, \; 0 \leq t \leq 10$$

donde I representa las ingresas y G, los gastos. Se pide, razonando las respuestas:

(a) La función que expresa el beneficio de la empresa.

(b) ¿Cuándo se obtiene el beneficio máximo? ¿A cuánto asciende?

(c) Calcular el área encerrada por la gráfica de la función G(t) y el eje de abscisas en el intervalo [0,5].

Solución

3.4 Julio 2018

3.4.1 Opción A

En el estudio realizado recientemente sobre cambio climático, por el grupo intergubernamental de expertos, se expusieron datos sobre la disminución del hielo ártico en los océanos. Una función que ajusta esos valores desde el año 1900 es la siguiente:

$$E(t) = \begin{cases} -1{,}6t^2 + At + 9656 & \text{si } 0 \le t \le 60 \\ 16400 - Bt & \text{si } 60 < t \le 110 \end{cases}$$

donde E es la extensión de hielo ártico en los océanos en millones de km^2 y t el año de estudio. Se sabe quo la función es continua y tiene un máximo en 1937 (t=37).

(a) Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

(b) Representar gráficamente la extensión del hielo ártico en los océanos en función del tiempo.

Solución

3.4.2 Opción B

En una urbanización se ha verificado durante un control que el consumo de agua en metros cúbicos, entre las 14 y las 21 horas, varía de acuerdo con la función:

$$C(t) = -4t^3 + 210t^2 - 3600t + 20400 ,\ \ 14 \le t \le 21$$

Siendo C el agua consumida en metros cúbicos y t la hora de la realización del control.

Se pide justificando las respuestas:

(a) Determinar las horas de máximo y mínimo consumo de agua.

(b) Hallar los valores de dichos consumos máximo y mínimo.

(c) Calcular el área encerrada por la curva C y el eje de abscisas entre las 15 y las 20 horas.

Solución

3.5 Junio 2019

3.5.1 Opción A

Durante la crecida de un rio, la Confederación Hidrográfica del Tajo ha estimado que el caudal (en m^3 /s) ha variado durante las primeras 6 horas de acuerdo con la función:

$$C(t) = 2t^3-21t^2+60t+20,\ 0 \le t \le 6$$

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar las horas de máximo y mínimo caudal.

(b) Calcular dichos valores máximo y mínimo.

(c) Halla el área encerrada por la función C(t) y el eje OX entre los valores t = 3 y t = 5.

Solución

3.5.2 Opción B

El precio de cada acción de una determinada empresa oscila entre 2 y 8 euros. La facturación de dicha empresa en bolsa depende del precio de la acción y viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} 3 + Ax & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \\ 53 + 2x + Bx^2 & \text{si } 5 < x \leq 8 \end{cases}$$

Siendo F(x) la facturación de la empresa en bolsa (en miles de euros) y x el precio de la acción (en euros). Se sabe que para un precio de la acción de 5 euros la facturación es de 13 mil euros y que la función es continua. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar las constantes A y B.

(b) Calcular las asíntotas verticales de la función $F(x) / (x^2 – 3x -4)$ en el intervalo [2,5]

Solución

3.6 Julio 2019

3.6.1 Opción A

La potencia requerida por la maquinaria eléctrica de una empresa durante las 10 horas de su funcionamiento viene dada por la expresión:

$$P(t) = - t^3 + 15t^2 - 48t + 50, \quad 0 \leq t \leq 10$$

donde t es el tiempo expresado en horas y P(t) la potencia expresada en kilovatios (kw). Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar a qué horas se producen el máximo y el mínimo de esta potencia.

(b) Calcular dichos valores máximo y mínimo.

(c) Calcular el área encerrada por la función P(t) y el eje OX entre t = 1 y t = 5.

Solución

3.6.2 Opción B

En un cultivo de bacterias desarrollado durante 6 horas se produce cierta sustancia de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$S(t) = At^3 - 2Bt^2 + 5t, \quad 1 \leq t \leq 6$$

donde S(t) es la cantidad de sustancia producida (en ml) y t el tiempo de desarrollo del cultivo. Se sabe que la producción de la sustancia es mínima a las 5 horas, momento en el cual se inhibe la actividad bacteriana y la producción es de 0 ml.

(a) Determinar las constantes A y B. Justificar las respuestas.

(b) Calcular las asíntotas de la función $S(t) / (t^2(t-2))$ en el intervalo $(1, \infty)$

Solución

3.7 Junio 2020

3.7.1 Problema 1

El gasto G (en euros) por el consumo de energía eléctrica en un taller durante las 8 horas de funcionamiento varía de acuerdo con la función:

$$G(t) = 2t^3 - 27t^2 + 84t + 60 \ (0 \leq t \leq 8)$$

donde t es el tiempo transcurrido en horas. Se pide, justificando las respuestas, determinar a qué horas se producen los gastos máximo y mínimo y los valores de dichos gastos máximo y mínimo.

Solución

3.7.2 Problema 2

En una piscina natural, el aumento de temperatura (en grados centígrados), x, ocasiona un aumento en la cantidad de algas en superficie (en kg), F (x). La relación entre ambas cantidades viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} 2Bx + 2A & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 3Ax + 8B & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Se sabe que para un aumento de 4 grados centígrados, se han recogido 12 kg de algas y que la función es continua. Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

Solución

3.7.3 Problema 3

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + x - 2$ y el eje OX entre $x = 4$ y $x = 6$.

(b) Calcular las asíntotas de la función $g(x) = \frac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)}$ Solución

4 PROBABILIDAD

4.1 Junio 2017

En la exposición de la. Facultad de Ciencias, “Original o Réplica" hay 42 fósiles, 28 rocas y 36 metales. Se sabe que, de ellos, son originales 6 fósiles, 14 rocas y 20 metales.

(a) Si escogemos al azar una pieza de la exposición, ¿cuál es la probabilidad de que sea un metal?

(b) Si escogemos al azar una pieza de la exposición, ¿cuál es la probabilidad de que sea replica?

(c) Si escogemos al azar una pieza de la exposición y es una réplica, ¿cuál es la probabilidad de que sea un fósil?

Solución

4.2 Julio 2017

Una región de bosques está dividida en 3 zonas A, B y C. Para el próximo verano la probabilidad de incendio en cada zona es de 0.1, 0.2 y 0.05 respectivamente. En cada zona solo puede producirse, como máximo, un incendio. Si consideramos que los incendios se producen de forma independiente entre las zonas:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ningún incendio?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente dos incendios?

(c) Si se sabe que ha habido solo un incendio, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en la zona A?

Justificar las respuestas

Solución

4.3 Junio 2018

Se está realizando un estudio sobre los turistas en cierta ciudad. Se sabe que el 60 % son europeos, el 30 % americanos y el resto asiáticos. El 70 % de los europeos son mujeres, el 50 % de los americanos son mujeres y el 30 % de los asiáticos son mujeres.

(a) Si se selecciona un turista al azar, ¿cuál es la probabilidad de quo sea una mujer americana?

(b) Si se selecciona un turista al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

(c) Si nos dicen que se ha seleccionado un turista y es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que sea europea?

Solución

4.4 Julio 2018

Un fotógrafo aficionado hace copia de seguridad de sus imágenes en espacios virtuales. Tiene contratados tres servicios premium: Dropbox, Onedrive y Box. Por razones de espacio, cada imagen la incluye solamente en uno de ellos. En Dropbox tiene cl 40 % de sus imágenes, el 30 % en Onedrive y el resto en Box. Cada imagen esta etiquetada en uno de dos tipos posible: 'Retratos' o 'Paisajes'. En Dropbox, el 25 % son retratos, en Onedrive el 60 % y en Box, el 90 %. El resto son paisajes.

(a) Si escoge una imagen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea retrato?

(b) Si escoge una imagen al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que sea paisaje y este en Box?

(c) Si escoge una imagen al azar y es paisaje, ¿Cuál es la probabilidad de que este en Onedrive?

Solución

4.5 Junio 2019

En un bosque hay 50 abetos, 30 cipreses y 120 pinos. Una enfermedad provocada por una oruga afecta a 25 abetos, 9 cipreses y 48 pinos. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular la probabilidad de que un pino elegido al azar este infectado por la oruga.

(b) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar este infectado por la oruga.

(c) Si se selecciona un árbol al azar y está infectado por la oruga, ¿cuál es la probabilidad de que sea un pino?

Solución

4.6 Julio 2019

En una bodega, el 50 % del vino que se fabrica es tinto, el 30 % blanco y el resto rosado. Una vez en las barricas se vuelve agrio el 5 % del vino tinto, el 10 % del vino blanco y el 7 % del vino rosado.

(a) Calcular la probabilidad de que una barrica elegida al azar contenga vino blanco y que además dicho vino esté agrio.

(b) Calcular la probabilidad de que una barrica. de vino tinto contenga vino con buen sabor.

(c) Si se selecciona al azar una barrica y el vino está agrio, ¿cuál es la probabilidad de que contenga vino tinto?

Solución

4.7 Junio 2020

Una biblioteca cuenta con 1000 socios, de los cuales 350 son jóvenes, 400 adultos y 250 mayores. Encuestados sobre la puesta en marcha de un nuevo servicio, se muestran favorables 210 jóvenes, 300 adultos y 125 mayores. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular la probabilidad de que un adulto sea contrario a la puesta en marcha del servicio.

(b) Calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar sea favorable a la puesta en marcha del servicio.

Solución

5 ESTADÍSTICA

5.1 Junio 2017

Una empresa de franquicias ha observado que durante el último año los beneficios han disminuido. Sospecha que hay mala gestión de las tiendas. Realiza un estudio para comprobarlo y de 95 tiendas muestreadas, 28 de ellas tienen mala gestión.

a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % de la proporción de tiendas mal gestionadas.

b) Si la empresa quiere que la longitud de intervalo sea 0.1, ¿cuántas tiendas debería muestrear?

Solución

5.2 Julio 2017

Para realizar el control de calidad en la fabricación de protectores de pantallas de dispositivos móviles se utiliza el intervalo de confianza al 99 % de! grosor de los mismos. Se sabe que la distribución del grosor es una normal de desviación típica conocida de 0.1 mm. Una empresa quiere crear su intervalo de confianza y muestrea diez protectores con los siguientes grosores (en mm):

0.50 0.43 0.37 0.27 0.60 0.32 0.31 0.27 0.40 0.36

a) Calcula el intervalo de confianza al 99% del grosor medio de los protectores.

b) Para que el intervalo de confianza sea útil, su longitud debe ser 0,1. ¿Cuántos protectores necesita muestrear la empresa para obtener esa precisión?

Solución

5.3 Junio 2018

Una región agrícola se dedica a la producción de tomates. Durante este año se ha utilizado un nuevo abono y se quiere estimar la cantidad de tomate producido por hectárea. Se han muestreado 37 zonas y la producción media ha sido de 78 tn por hectárea. Se sabe que el número de tn por hectárea sigue una distribución normal con desviación típica 2.

(a) Calcular el intervalo de confianza al 95%

(b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 0.5? Justificar las respuestas.

Solución

5.4 Julio 2018

En una ciudad se desea estimar la proporción do hogares que reciclan sus envases de plástico. La ciudad está dividida en cuatro barrios (A, B, C y D) con 800, 2000, 1200 y 1000 hogares respectivamente. Se selecciona mediante muestreo estratificado con afijación proporcional una muestra de 400 hogares.

(a) ¿Cuántos hogares de cada uno de los barrios se incluirán en la muestra?

(b) Si en el barrio B, 64 hogares de la muestra reciclan, ¿cuál es la estimación de hogares que reciclan en ese barrio?

(c) Proporcionar un intervalo de confianza al 95% para la estimación puntual anterior.

Justificar las respuestas.

Solución

5.5 Junio 2019

El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono sigue una distribución normal con desviación típica 24 horas. Se pregunta a 100 clientes por el tiempo invertido en la portabilidad, obteniéndose una media de 36 horas. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % para la media de tiempo que tarda dicha compañía en hacer efectiva la portabilidad.

(b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 5?

Solución

5.6 Julio 2019

Se realiza un estudio sobre el tiempo de reacción de los conductores ante un imprevisto. Se considera una población de 10000 conductores, de los cuales 5000 tienen una antigüedad superior a 10 años, 3000 tienen una antigüedad entre 3 y 10 años y el resto tienen una antigüedad inferior a los 3 años. Se selecciona una muestra de 500 conductores mediante muestreo estratificado con afijación proporcional. Se pide, justificando la respuesta:

(a) ¿Cuántos conductores de cada uno de los estratos mencionados anteriormente se incluirán en la muestra?

(b) En los conductores con una antigüedad de menos de 3 años que resultan elegidos en la muestra, se observa que el tiempo medio de reacción es de 1.2 segundos. Supuesta que dicha variable tiene una distribución normal de desviación típica 0.3, proporcionar un intervalo de confianza al 95% para el tiempo medio de reacción de estos conductores.

Solución

5.7 Junio 2020

5.7.1 Problema 1

El peso de los libros de texto es una variable que sigue una distribución normal con una desviación típica de 72 gramos. Se toma una muestra de 36 libros, siendo su peso medio de 800 gramos. Calcular, justificando la respuesta, el intervalo de confianza al 95 % para el peso medio de los libros de texto.

Solución

5.7.2 Problema 2

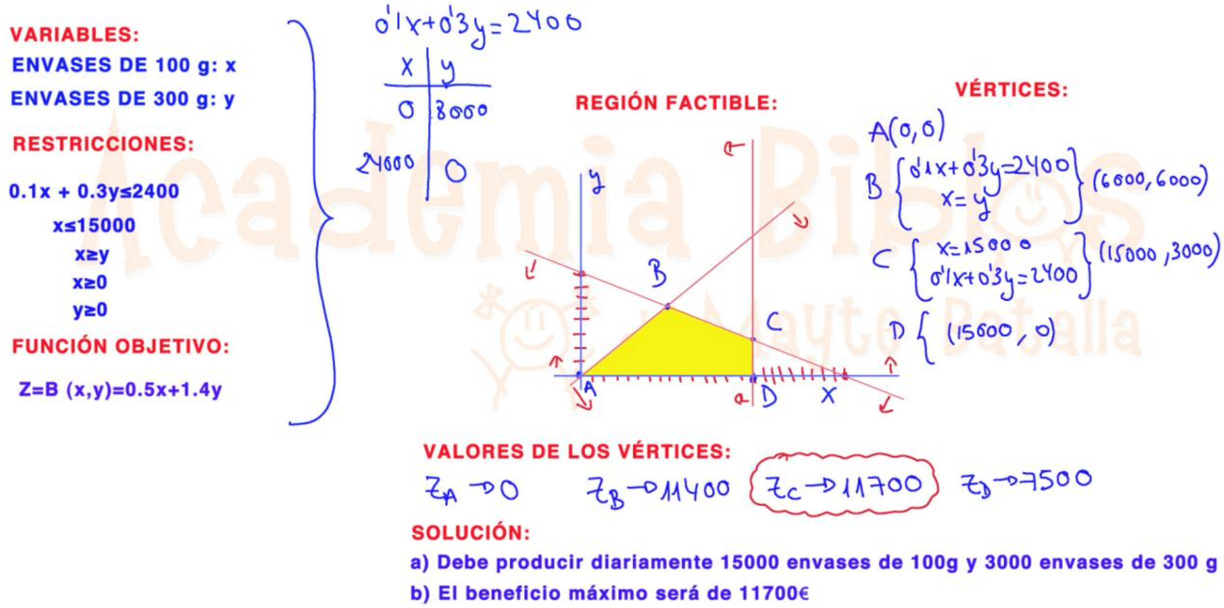
Se pretende realizar un estudio sobre la renta mensual de las familias. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica 400 euros. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95 % para la media de dicha variable, ¿cuántas familias tenemos que seleccionar (tamaño muestral) para que el intervalo tenga una longitud de 160 euros? Justificar la respuesta.

Solución

6 SOLUCIONES

6.1 Programación lineal

6.1.1 Programación Lineal Junio 2017

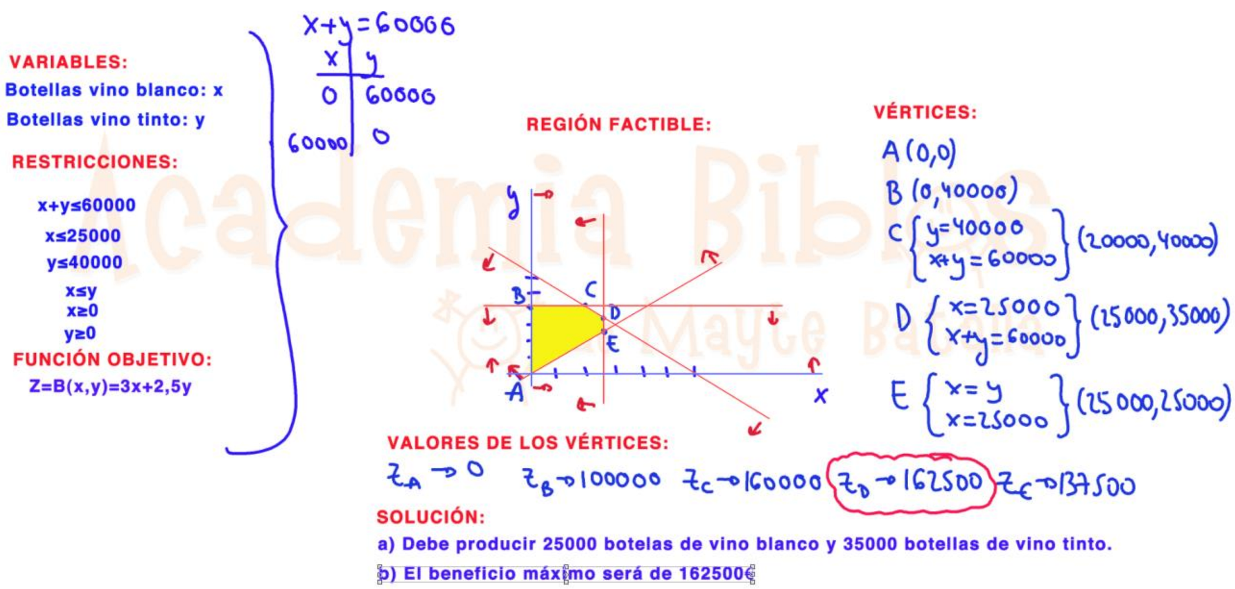


[Volver](#)

6.1.2 Programación Lineal Julio 2017

[Volver]

6.1.3 Programación Lineal Junio 2018



[Volver]

6.1.4 Programación Lineal Julio 2018

VARIABLES:

Lotes A: x

Lotes B: y

RESTRICCIONES:

$x+2y\le 1600$

$x\le 800$

$x+y\le 1000$

$x\ge 0$

$y\ge 0$

FUNCIÓN OBJETIVO:

$Z=B(x,y)=30x+40y$

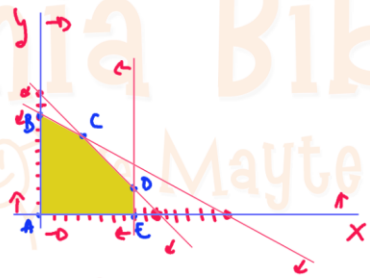
$x+2y=1600$

x	y
0	800
1600	0

$x+y=1000$

x	y
0	1000
1000	0

REGIÓN FACTIBLE:



VÉRTICES:

A(0,0)

B(0,800)

C $\begin{cases} x+2y=1600 \\ x+y=1000 \end{cases}$ C(400,600)

D $\begin{cases} x=800 \\ x+y=1000 \end{cases}$ D(800,600)

E(800,0)

VALORES DE LOS VÉRTICES:

$Z_A \to 0$ $Z_B \to 32000$ $Z_C \to 36000$ $Z_D \to 32000$ $Z_E \to 24000$

SOLUCIÓN:

a) Deben ofrecer 400 lotes del tipo A y 600 lotes del tipo B.

b) El beneficio máximo será de 36000€

[Volver]

6.1.5 Programación Lineal Junio 2019

VARIABLES:

Vitrocerámicas: x

Inducción: y

RESTRICCIONES:

$100x+200y\le 3000$

$y\le 12$

$x+y\le 20$

$x\ge 0$

$y\ge 0$

FUNCIÓN OBJETIVO:

0.3*100=30

0.25*200=50

$Z=B(x,y)=30x+50y$

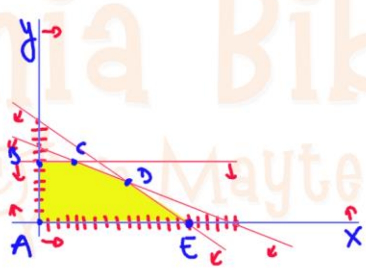
$\cancel{10}\cancel{0}x+2\cancel{00}y=30\cancel{00}$

x	y
0	15
30	0

$x+y=20$

x	y
0	20
20	0

REGIÓN FACTIBLE:



VÉRTICES:

A(0,0)

B(0,12)

C $\begin{cases} y=12 \\ x+2y=30 \end{cases}$ (6,12)

D $\begin{cases} x+2y=30 \\ x+y=20 \end{cases}$ (10,10)

E(20,0)

VALORES DE LOS VÉRTICES:

$Z_A \to 0$ $Z_B \to 600$ $Z_C \to 780$ $Z_D \to 800$ $Z_E \to 600$

SOLUCIÓN:

a) Debe comprar 10 vitrocerámicas y 10 de inducción .

b) El beneficio máximo será de 800€

[Volver]

6.1.6 Programación Lineal Julio 2019

	A	B	Total
Montaje	2	3	300
Reglaje	1	0,5	120

VARIABLES:

Motor tipo A: x

Motor tipo B: y

RESTRICCIONES:

$2x+3y\le 300$

$y\le 80$

$x+0.5y\le 120$

$x\ge 0$

$y\ge 0$

FUNCIÓN OBJETIVO:

$Z=B(x,y)=220x+280y$

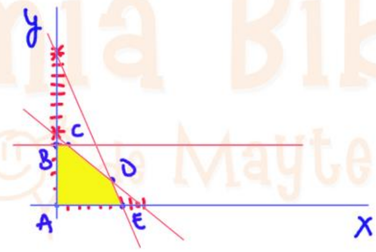
$2x+3y=300$

x	y
0	100
150	0

$x+0'5y=120$

x	y
0	240
120	0

REGIÓN FACTIBLE:



VÉRTICES:

$A(0,0)$

$B(0,80)$

$C\begin{cases} y=80 \\ 2x+3y=300 \end{cases}(30,80)$

$D\begin{cases} 2x+3y=300 \\ x+0'5y=120 \end{cases}(105,30)$

$E(120,0)$

VALORES DE LOS VÉRTICES:

$Z_A \to 0$ $Z_B \to 22400$ $Z_C \to 29000$ $Z_D \to 31500$ $Z_E \to 26400$

SOLUCIÓN:

a) Debe fabricar 105 motores de tipo A y 30 motores del tipo B .

b) El beneficio máximo será de 31500€

Volver

6.1.7 Programación Lineal Junio 2020 (1)

	Turismos	Furgonetas
A	2	3
B	1	0,5
Total	180	140

VARIABLES:

Días fábrica A: x

Días fábrica B: y

RESTRICCIONES:

$6x+2y\ge 180$

$2x+2y\ge 140$

$x\ge 0$

$y\ge 0$

FUNCIÓN OBJETIVO:

$Z=C(x,y)=30000x+20000y$

$6x+2y=180$

$3x+y=90$

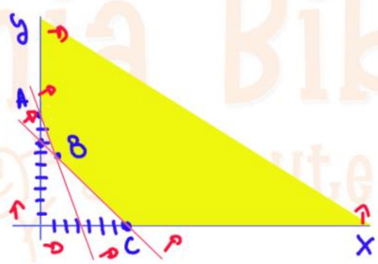
x	y
0	90
30	0

$2x+2y=140$

$x+y=70$

x	y
0	70
70	0

REGIÓN FACTIBLE:



VÉRTICES:

$A(0,90)$

$B\begin{cases} 3x+y=90 \\ x+y=70 \end{cases}(10,60)$

$C(70,0)$

VALORES DE LOS VÉRTICES:

$Z_A \to 1800000$ $Z_B \to 1500000$ $Z_C \to 2100000$

SOLUCIÓN:

a) Debe abrir 10 días la fábrica A y 60 días la fábrica B .

b) El coste mínimo será 1500000€

Volver

6.1.8 Programación Lineal Junio 2020 (2)

	Miel	Polen
A	2	2
B	3	1
Total	900	500

VARIABLES:

Lotes tipo A: x

Lotes tipo B: y

RESTRICCIONES:

$2x+3y\geq 900$

$2x+1y\geq 500$

$x\geq 0$

$y\geq 0$

FUNCIÓN OBJETIVO:

$Z=B(x,y)=15x+12y$

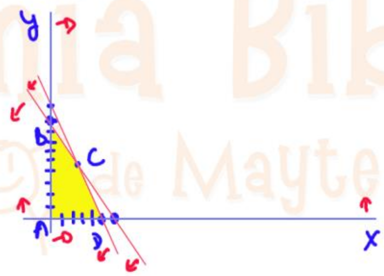
$2x+3y=900$

x	y
0	450
300	0

$2x+y=500$

x	y
0	500
250	0

REGIÓN FACTIBLE:



VÉRTICES:

$A(0,0)$

$B(0,300)$

$C\begin{cases}2x+3y=900\\ 2x+y=500\end{cases}(150,200)$

$D(250,0)$

VALORES DE LOS VÉRTICES:

$z_A\to 0$ $z_B\to 3600$ $z_C\to 4650$ $z_D\to 3750$

SOLUCIÓN:

a) Debe organizar 150 lotes del tipo A y 200 del tipo B .

b) El beneficio máximo será de 4650€

Volver

6.2 Matrices

6.2.1 Matrices Junio 2017

a) Calculamos la inversa usando la fórmula:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj^t$$

Comprobamos que $|A|$ y $|B|$ sean distintos de 0.

$$|A| = 1 \; y \; |B| = -1$$

$A \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjunta\ traspuesta} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{inversa} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$B \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjunta\ traspuesta} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{inversa} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 11 & -8 \end{pmatrix}$

$(A \cdot B)^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 11 & -8 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} -8 & 11 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} -8 & -11 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{adj^t} \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -11 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{inversa} \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 11 & -7 \end{pmatrix}$$

$B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 11 & -7 \end{pmatrix}$

Por tanto, se verifica que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

c) Como tenemos ya la inversa de A calculada, lo mejor es despejar la matriz X.

$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$

Volver

6.2.2 Matrices Julio 2017

a) Para determinar si existen inversas de A y de B hemos de verificar el que determinante sea distinto de 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, podemos calcular la inversa de A pero no la de B:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj^t$$

$$A\rightarrow\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}\xrightarrow{adj}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}\xrightarrow{adj^t}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}\xrightarrow{inv.}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

b) $A\cdot X+B = I \rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X= A^{-1}\cdot (I - B) \rightarrow X= A^{-1}\cdot (I - B)$

$$I-B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X= A^{-1}\cdot (I - B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \\ -14 & 4 & -10 \end{pmatrix}$$

Volver

6.2.3 Matrices Junio 2018

Muchos preferís hacer el problema haciendo sistemas de ecuaciones. Personalmente, prefiero la opción de despejar la matriz, pero vamos a resolverlo por ambos caminos:

A·X-B= B·X+A

X=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Truco para evitar colapsos de ecuaciones: hacer fila1*columna 1 y fila2*columna 1 y luego fila1*columna 2 y fila2*columna 2)

$$\left.\begin{array}{l} 2a + 1c - 1 = a + 2c + 2 \\ -1a + 1c - 2 = 2a + c - 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a - 1c = 3 \\ -3a = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = -1/3 \\ c = -10/3 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2b + 1d - 2 = b + 2d + 1 \\ -1b + 1d - 1 = 2b + d + 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} b - 1d = 3 \\ -3b = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} b = -2/3 \\ d = -11/3 \end{array}$$

$$X=\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-10}{3} & \frac{-11}{3} \end{pmatrix}$$

Por el método de la matriz inversa.

A·X-B= B·X+A → A·X- B·X = A + B → (A-B) · X= (A+B) → $(A-B)^{-1}$ · (A-B) · X= $(A-B)^{-1}$ · (A+B)→ X= $(A-B)^{-1}$ · (A+B)

A-B= $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |A - B| = -3$

(A-B)$^{-1}$=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{adj^t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{inversa} \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

A+B= $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

X= (A-B)$^{-1}$ · (A+B) = $\frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-10}{3} & \frac{-11}{3} \end{pmatrix}$

Volver

6.2.4 Matrices Julio 2018

a) Despejamos la matriz X (aquí hacerlo por ecuaciones es mucho más laborioso, aún así, es posible hacerlo si vas haciendo fila1*columna1, fila2*columna1, fila3*columna1 y resuelves el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, luego lo mismo con la columna 2 y con la columna 3).

A·X+A^2=2A → A·X =2A - A^2 → A^{-1}·A·X = A^{-1} · (2A - A^2) → X = A^{-1} · (2A - A^2)

Calculamos la inversa de A mediante la fórmula:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj^t$$

$$|A| = -2$$

A→ $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{adj} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{adj^t} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{inv.} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

2A-A^2→$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ -4 & -5 & 6 \\ 6 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} \cdot (2A - A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ -4 & -5 & 6 \\ 6 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Volver

6.2.5 Matrices Junio 2019

a) Para determinar para qué valores de x no existe $(A \cdot B)^{-1}$ bastará con ver qué valores de x anulan el determinante $|A \cdot B|$

$$A_{2x3} \cdot B_{3x2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2x & 3 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1+2x & 3 \\ -x & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2x + 3x = 5x - 1 \rightarrow 5x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{5}$$

A·B no tendrá inversa si:

$$x = \frac{1}{5}$$

b) Calcular la matriz inversa de A·B para x=1

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot B| = 4$$

$$(A \cdot B)^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{adj^t} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{inversa} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Volver

6.2.6 Matrices Julio 2019

a) Para ver para qué valor de b no existe inversa, hemos de ver qué valor anula el determinante de A

$$|\mathrm{A}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (3+0+0) - (2b+0+0) = 3-2b \to 3-2b = 0 \to b = 3/2$$

La matriz A no tendrá inversa si b = 3/2

b) Para b=1 hallar la matriz X que verifique $A\cdot X=A^3-I$

Despejamos la ecuación:

$A^{-1}\cdot A\cdot X= A^{-1}\cdot(A^3-I) \rightarrow X= A^{-1}\cdot(A^3-I)$

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & 10 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 30 & 20 & 41 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - I = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 30 & 20 & 41 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 30 & 20 & 40 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de A :

$$|A| = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{adj} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{adj^t} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & - & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{inv.} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 30 & 20 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}0 & 10 & 5\\ 0 & 0 & 0\\ 10 & 0 & 10\end{pmatrix}$$

Nota: Hay un camino más corto de resolver este ejercicio, si pensamos así:

$X= A^{-1} \cdot (A^3-I) \rightarrow X= A^{-1} \cdot A^3- A^{-1} \cdot I= A^{-1} \cdot A \cdot A^2 - A^{-1} = A^2 - A^{-1}$

Recordemos que $A^{-1} \cdot A=I$ y que la identidad es el elemento neutro de la multiplicación.

$$X=\begin{pmatrix}3 & 4 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 8 & 4 & 11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 6 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 10 & 5\\ 0 & 0 & 0\\ 10 & 0 & 10\end{pmatrix}$$

Volver

6.2.7 Matrices Junio 2020 - Problema 1

(Ver vídeo)

$$\left.\begin{array}{l} -2X + Y = A + B \\ 5X + Y = A - 2B \end{array}\right\}$$ Aplicamos el método de reducción para reducir la Y (E_1-E_2)

$-7X = 3B \rightarrow X = \frac{-1}{7}(3B)$

$$X=\frac{-1}{7}\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{7} & \frac{-3}{7}\\ 0 & \frac{3}{7}\end{pmatrix}$$

Personalmente, aunque ya podríamos hacer sustitución, prefiero hacer reducción para reducir la X pues si hemos cometido un error en la X lo vamos a arrastrar para la Y.

$5E_1+2E_2$

$$7Y= 7A+B \rightarrow Y=\frac{1}{7}(7A+B)=\frac{1}{7}\left(\begin{pmatrix}7 & 35\\ 0 & -21\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}6 & 36\\ 0 & -22\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{6}{7} & \frac{36}{7}\\ 0 & \frac{-22}{7}\end{pmatrix}$$

X= $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-3}{7} \\ 0 & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$ Y= $\begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{36}{7} \\ 0 & \frac{-22}{7} \end{pmatrix}$

Volver

6.2.8 Matrices Junio 2020 – Problema 2

(Ver vídeo)

Para resolver este problema comenzaremos haciendo la matriz inversa de A

$$|A| = x^2 + 1$$

A→$\begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \xrightarrow{adj^t} \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \xrightarrow{inversa} \frac{1}{x^2+1}\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$

Queremos que se verifique:

$A^t=A^{-1}$

$\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+1} & \frac{-1}{x^2+1} \\ \frac{1}{x^2+1} & \frac{x}{x^2+1} \end{pmatrix}$ → Igualando (a_{11}=a_{11}) obtenemos: x = $\frac{x}{x^2+1}$ → x^3+x=x →x=0

Comprobamos que para ese valor se verifica el resto de los términos.

a_{12}: -1 = -1

a_{21}: 1 = 1

a_{22}: 0=0

El valor buscado, por tanto, es x=0

Volver

6.3 Funciones

6.3.1 Funciones Junio 2017 – Opción A

a) Sabemos que V(12)=480 y que V'(11)=0.

$$V'(t)=-2310+2Bt-30t^2$$

(Recomiendo empezar siempre sustituyendo en la derivada)

$-2310+2B\cdot 11-30\cdot 11^2 =0$ → B= 270

A-27720+144B-17280=480 → A = 6600

b) V(t) = 6600 – 2310t + $270t^2$-$10t^3$

El propio enunciado nos dice que el máximo es en t=11, por tanto calculamos V(11)

El número máximo será V(11)=550

El número máximo de visitantes será de 550.

c) f (x) = (6600 – 2310t + 270t^2-10t^3) / (t-10)

No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas. Podemos calcular asíntota vertical para t=10 (el valor que anula el denominador y que está dentro del dominio de la función [8,13])

$$\lim_{t \to 10^+} \frac{6600 - 2310t + 270t^2 - 10t^3}{t - 10} = +\infty$$

$$\lim_{t \to 10^-} \frac{6600 - 2310t + 270t^2 - 10t^3}{t - 10} = -\infty$$

Tiene asíntota vertical en t=10

Volver

6.3.2 Funciones Junio 2017 – Opción B

a) Para calcular el máximo y el mínimo hemos de calcular qué valores anulan la primera derivada y estudiar el signo de la segunda derivada.

N\`(t) = 3$t^2$ -42t + 99 → N\`(t) =0. Resolviendo la ecuación de segundo grado (podemos simplificar para facilitar los cálculos t^2 -14t + 33 = 0) tenemos que t=3 y t=11.

N\`\` (t) = 6t-42=6·(t-7)   N\`\`(3)=-24 < 0 máximo relativo en (3,N(3))

N\`\`(11)=24 > 0 mínimo relativo en (11,N(11))

Cuando la función es de grado superior a dos, debemos de comprobar los valores extremos también para decidir cuál es el máximo o mínimo absoluto. Yo recomiendo meter la función en la calculadora y hacer una tabla de valores y así nos evitamos posibles errores de cálculo.

N (1) = 1^3 – 21· 1^2 + 99 ·1 + 1000=1079

N (3)= 3^3 – 21· 3^2 + 99 ·3 + 1000=**1135**

N (11)= 11^3 – 21·11^2 + 99·11 + 1000=**879**

N (12) = 12^3 – 21 · 12^2 + 99 ·12 + 1000=892

El valor máximo se produce en el mes de marzo y el valor mínimo en el mes de noviembre.

b) *El máximo de empleados es 1135 y el mínimo es de 879.*

c) Para representarla tenemos suficiente con los valores que hemos calculado.

Volver

6.3.3 Funciones Julio 2017 – Opción A

a) Para determinar el máximo y el mínimo veremos qué valores anulan la primera derivada y estudiaremos su signo en la segunda derivada.

$$B`(t)=-3t^2+24t-36$$

Para resolver la ecuación podemos simplificarla $-t^2+8t-12=0$ y obtenemos t= 6 y t=2

Hacemos la segunda derivada y estudiamos el signo para t=6 y t=2.

$$B``(t)=-6t+24=-6(t-4)$$

$$B``(6)=-12 < 0 \text{ Máximo relativo en } (6,B(6))$$

$$B``(2)=12 >0 \text{ Mínimo relativo } (2, B(2))$$

Calculamos los valores de los extremos y los valores para t=6 y t=2 (vídeo para hacer la tabla con la calculadora)

B(1)=55

B(2)=**48**

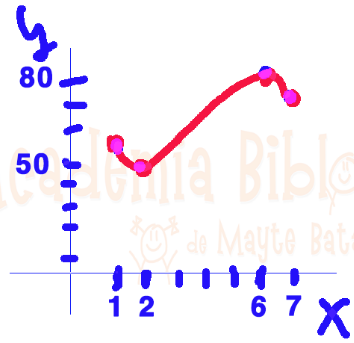
B(6)=**80**

B(7)=73

El número máximo de bacterias se produce el sexto día y el mínimo el segundo día

b) *El valor máximo será de 80 mil bacterias y el mínimo de 48 mil bacterias.*

c) Para representarla nos basta con los valores que tenemos calculados:



Volver

6.3.4 Funciones Julio 2017 – Opción B

(Ver vídeo)

a) Se sabe que la función es continua y que para x=30 el valor es de 300 unidades. Por tanto:

$$\lim_{t\to 30^-}(Ax - x^2) = \lim_{t\to 30^+}(600 - Bx) = D(30)$$

Podemos igualar cada uno de los límites laterales a 300.

A·30-30^2=300 → **A=40**

600-B·30=300 → **B=10**

b) Para representarla calcularemos D(20) y D(60= la primera rama sabemos que es una parábola abierta hacia abajo (podría ser de utilidad calcular el vértice para "visualizar" mejor la gráfica) y la segunda rama es una función afín decreciente, puesto que la pendiente es negativa.

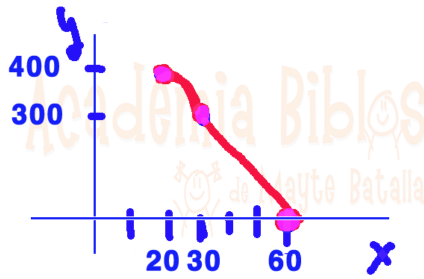
D(x) = 40x-x^2 para [20,30]

D(x)= 600-10x para (30,60]

- D(20)=400 ; D(60)=0
- Vértice:

Podemos o bien derivar e igualar a cero o bien con la fórmula de siempre x=$\frac{-b}{2a}$

Vemos que x=20 es el vértice.



Volver

6.3.5 Funciones Junio 2018 – Opción A

(Ver vídeo)

a) Se sabe que en el año 1970 el consumo fue de 711.5 litros y en 1990 de 526.5 litros. Por tanto:

F (10) = 711.5 → $0{,}025 \cdot 10^3 - A \cdot 10^2 + B \cdot 10 + 654 = 711.5$

F (30) = 526.5 → $0{,}025 \cdot 30^3 - A \cdot 30^2 + B \cdot 30 + 654 = 526.5$

Operando nos quedaría:

$-100A+10B=32.5$

$-900A+30B=-802.5$

Hacemos reducción $3E_1-E_2$

Obtenemos

$$\boldsymbol{A = \frac{3}{2} \; y \; B = \frac{73}{4}}$$

b) Para representarla como no nos dice el problema ninguna información sobre el máximo y el mínimo, es recomendable calcularlos y calcular los valores extremos.

$F(t) = 0.025t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{73}{4}t + 654$

$F`(t) = 0.075t^2 - 3t + \frac{73}{4}$

Aproximadamente sale t=7.5 y t=32.5 que nos da una idea para dibujarla mejor.

F(0)=654

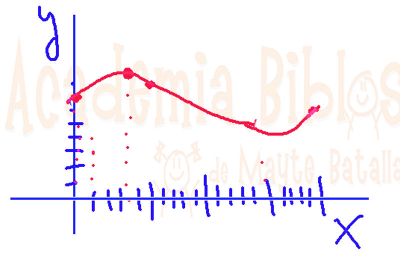
F(7,5)=717.05

F(10)=711.5

F(30)=526.5

F(32.5)=520.95

F(40)=584



[Volver](#)

6.3.6 Funciones Junio 2018-Opción B

a) Para obtener la función que expresa el beneficio de la empresa es tan sencillo como hacer la resta de ambos polinomios (ingresos menos gastos).

$$B(t)=I(t)-G(t)= -3t^2+62t - (t^2-10t+ 120)= -4t^2+72t-120$$

b) El beneficio máximo será el vértice de la parábola, por lo que se podría hacer con la fórmula ($x=\frac{-b}{2a}$), pero es preferible hacerlo por derivadas.

B\`(t)= -8t+72 = -8·(t-9) → B\`(t)=0 → t=9

B\`\`(t)=-8 → B\`\`(9)=-8 < 0 Máximo (9,B(9)).

Ya podemos afirmar que:

El beneficio máximo lo obtiene a los nueve años de funcionamiento.

Para calcular a cuánto asciende basta con calcular $B(9)= -4\cdot 9^2+72\cdot 9-120=204$

El beneficio máximo será de 204 miles de euros

c) Para calcular el área encerrada tendremos que hacer la integral definida entre t=0 y t=5

$$\int_0^5 (t^2-10t+120)\,dx = \left|\frac{1}{3}t^3-\frac{10}{2}t^2+120t\right|_0^5 = \left|\frac{1}{3}t^3-5t^2+120t\right|_0^5 = G(5)-G(0)=\frac{1550}{3}$$

Por lo que el área será de 516.67 u^2

[Volver](#)

6.3.7 Funciones Julio 2018 – Opción A

a) Sabemos que la función es continua y que el máximo está en t=37. Por tanto, sabemos:

$$\lim_{t\to 60^-}(-1.6t^2 + At + 9656) = \lim_{t\to 60^+}(16400 - Bt) = E(60)$$

$$E`(37) = 0$$

Calculamos la derivada de la primera rama (es la que incluye en su dominio el 37)

$$E`(t)=-3.2t+A$$

$$-3.2\cdot 37+A=0$$

$$\mathbf{A=118.4}$$

$$-1.6\cdot 60^2+A\cdot 60+9656=16400-B\cdot 60$$

$$(-5760+7104+9556-16400)/(-60)=B$$

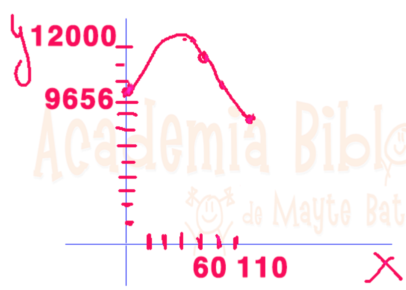
$$\mathbf{B=90}$$

b) Para representarla tenemos que intentar visualizar la gráfica previamente, la primera rama es una parábola abierta hacia abajo con un máximo en t=37 y la segunda rama es una función afín decreciente.

E(37)=11846.4

E(60)= 11000

E(110)=6500



Volver

6.3.8 Funciones Julio 2018 – Opción B

a) Para calcular el consume máximo y mínimo hemos de calcular qué valores anulan la primera derivada y estudiar su signo en la segunda derivada.

$C´(t)=-12t^2+420t-3600=12(-t^2+35t-300)$

$C´(t)=0$, resolviendo tenemos que t=15 y t=20. Estudiamos su signo en la segunda derivada.

$C``(t)=12(-2t+35)$

C``(15)=60 > 0 mínimo relativo

C``(20)=-60 <0 máximo relativo

Calculamos los valores para 15 y 20 y para los límites superior e inferior de la función:

C(14)=184

C(15)=**150**

C(20)=**400**

C(21)=366

El valor máximo lo alcanza a las 15 horas y el valor mínimo a las 20 horas.

b) *El valor mínimo será de 150 m^3 y el valor máximo de 400 m^3*

c) Para calcular el área basta con hacer la integral definida entre los valores 15 y 20.

$$\int_{15}^{20}(-4t^3+210t^2-3600t+20400) = \left|-\frac{4}{4}t^4+\frac{210}{3}t^3-\frac{3600}{2}t^2+20400t\right|_{15}^{20} =$$

$$\left|-t^4+70t^3-1800t^2+20400t\right|_{15}^{20} = C(20)-C(15) = 88000-86625 = 1375\ u^2$$

Volver

6.3.9 Funciones Junio 2019 – Opción A

(Ver vídeo)

a) Para determinar el valor máximo y mínimo hemos de calcular qué valores anulan la primera derivada y estudiar su signo en la segunda derivada.

C`(t)=6t$^2$-42t+60 → C´(t)=6(t$^2$-7t+10) → C`(t)=0 → t = 5 y t = 2

C``(t)=6(2t-7) → C``(5)= 18 > 0 mínimo relativo → C``(2)=-18 < 0 máximo relativo.

Calculamos los valores para t=2 y t=5 así como para los límites de la función

C(0) = 0

C(2) = **72**

C(5) = **45**

C(6) = 56

El valor máximo lo alcanza a la segunda hora y el valor mínimo a la quinta hora

b) *El valor máximo será de 72 m^3/s y el valor mínimo de 45 m^3/s*

c) Para calcular el área encerrada basta con calcular la integral definida entre t=3 y t=5

$$\int_3^5 (2t^3 - 21t^2 + 60t + 20) = \left| \frac{2}{4}t^4 - \frac{21}{3}t^3 + \frac{60}{2}t^2 + 20t \right|_3^5$$
$$= \left| \frac{1}{2}t^4 - 7t^3 + 30t^2 + 20t \right|_3^5 = C(5) - C(3) = \frac{575}{2} - \frac{363}{2} = \frac{212}{2}$$
$$= 106\, u^2$$

Volver

6.3.10 Funciones Junio 2019 – Opción B

(Ver vídeo)

a) Se sabe que la función es continua y que F(5)=13, por tanto:

$$\lim_{t\to 5^-} (3 + \mathrm{Ax}) = \lim_{t\to 5^+} (53 + 2\mathrm{x} + \mathrm{Bx}^2) = F(5)$$

Basta con igualar cada límite lateral al valor de la función en el punto 5.

3+A5=13 → **A = 2**

53+2·5+B·5^2=13 → **B= - 2**

b) Para calcular las asíntotas verticales tenemos que ver qué valores anulan el denominador (no pertenecen al dominio).

$x^2 – 3x -4 = 0$

x = 4 y x = -1 . Como -1 no pertenece al intervalo que nos proporciona el problema, solo hemos de calcular la AV para x=4

$$\lim_{t\to 4^-} \left(\frac{3+2x}{x^2-3x-4}\right) = -\infty$$
$$\lim_{t\to 4^+} \left(\frac{3+2x}{x^2-3x-4}\right) = \infty$$

Tiene una asíntota vertical en x=4

Volver

6.3.11 Funciones Julio 2019 – Opción A

a) Para calcular el máximo y el mínimo tenemos que calcular qué valores anulan la primera derivada y estudiar su signo en la segunda derivada.

P´(t)=-3t^2+30t-48=3 (-t^2+10t-16) → P´(t)=0 → t= 2 y t =8

P´´(t)=3·(-2t+10)=6·(-t+5) → P´´(2)=18 > 0 mínimo relativo → P´´(8)=-18 máximo relativo

Calculamos los valores de t=2 y de t=8 así como de los límites superior e inferior para verificar el máximo y el mínimo absoluto.

P(0)=50 ; P(2)=**6** ; P(8)=**114** ; P(10)=70

Hay un máximo de potencia a las ocho horas de funcionamiento y un mínimo a las dos horas.

b) El valor de la potencia mínima es de 6 kw y el de la potencia máxima es 114 kw

c) Para calcular el área encerrada basta con calcular la integral definida entre t=1 y t=5

$\int_1^5(-t^3+15t^2-48t+50) = \left|\frac{-1}{4}t^4+\frac{15}{3}t^3-\frac{48}{2}t^2+50t\right|_3^5 = \left|\frac{-1}{4}t^4+5t^3-24t^2+50t\right|_3^5 = C(5)-C(3) = \frac{475}{4}-\frac{123}{4} = \frac{352}{4} = 88\,u^2$

Volver

6.3.12 Funciones Julio 2019 – Opción B

a) Se sabe que el mínimo se produce a las 5 horas y que su valor es de cero. Por tanto:

S´(5)=0

S (5)=0

S´(t)=3At^2- 4Bt+5

3A·5^2-4B·5+5=0 → simplificamos entre 5 →15A-4B=-1

A·5^3-2B·5^2+5·5=0 → simplificamos entre 25 →5A-2B=-1

Resolvemos el sistema por reducción (E_1-3E_2) y obtenemos

B=1 y **A=1/5**

b) Vamos a calcular las asíntotas de la función que nos proporciona el enunciado

f(x)=$\frac{0.2t^3-2t^2+5t}{t^2(t-2)}$

- Asíntota vertical: Estudiamos los límites en los valores que anulan el denominador (no pertenecen al dominio), esto es, t=0 y t=2. Como t=0 no pertenece al dominio de la función solo lo estudiaremos en t=2
  - $\lim_{t\to 2^-}\left(\frac{0.2t^3-2t^2+5t}{t^2(t-2)}\right) = -\infty$; $\lim_{t\to 2^+}\left(\frac{0.2t^3-2t^2+5t}{t^2(t-2)}\right) = +\infty$

Tiene asíntota vertical en t=2

- Asíntota horizontal: Calculamos el límite de la función cuando x→∞

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{0.2t^3-2t^2+5t}{t^2(t-2)}\right) = 0.2$$

$$\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{0.2t^3-2t^2+5t}{t^2(t-2)}\right) = 0.2$$

Tiene asíntota horizontal en t=1/5

Volver

6.3.13 Funciones Junio 2020 – Problema 1

(Ver vídeo)

a) Para calcular el máximo y el mínimo, veremos qué valores anulan la primera derivada y estudiaremos su signo en la segunda derivada.

G´(t)=6t2-54t+84=6·(t2-9t+14) →G´(t)=0 → t2-9t+14=0 →t=7 y t=2

G``(t)=6·(2t-9) → G´´(2)=-30 < 0 máximo relativo   G´´(7)=30 >0 mínimo relativo

Calculamos los valores en los t=2 y t=7 así como en los límites superior e inferior del dominio de la función.

G(0)=60

G(2)=136

G(7)=11

G(8)=28

La hora en la que *se produce el mínimo gasto es a la séptima hora de funcionamiento y dicho gasto es de 11€, la hora de máximo gasto es la séptima hora con un valor de 136€*

Volver

6.3.14 Funciones Junio 2020 – Problema 2

a) Se sabe que la función es continua y que para x=4 el valor de f(x) es 12. Por tanto

F(4)=12

$$\lim_{t\to 3^-}(2\mathrm{B}x + 2\mathrm{A}) = \lim_{t\to 3^+}(\mathrm{x}^2 - 3Ax + 8B) = F(3)$$

F(4)=12 → 42-3A·4+8B= 12 → Simplificamos entre 4 → 4-3A+2B=3 → -3A+2B=-1

Igualamos límites → 2B·3+2A=32-3A·3+8B → 11A-2B=9

Resolvemos el sistema fácilmente por reducción (E1+E2) y obtenemos **A=1** y **B=1**

Volver

6.3.15 Funciones Junio 2020 – Problema 3

a) Para hallar el área encerrada primero comprobaremos el dominio de la función y vemos que el dominio de la función es (-$\infty, -2) \cup (-2,1) \cup (1, \infty)$, como nos pide entre 4 y 6 podemos resolver la integral sin problema.

$$\int_4^6 (x^2 + \mathrm{x} - 2) = \left|\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2\mathrm{x}\right|_4^6 = F(6) - F(4) = 78 - \frac{64}{3} = \frac{170}{3}\ u^2$$

b) Nos piden las asíntotas de la función:

$$g(x) = \frac{-2x^{\,2} - \,1}{3\,(\,x^2 + x - 2)}$$

- Asíntota vertical: Calculamos los valores que anulan el denominador.

  Resolviendo la ecuación de segundo grado tenemos que x=1 y x=-2

$$\lim_{x \to -2^-} \left(\frac{-2x^{\,2} - 1}{3\,(\,x^2 + x - 2)} \right) = -\infty \;;\; \lim_{x \to -2^-} \left(\frac{-2x^{\,2} - 1}{3\,(\,x^2 + x - 2)} \right) = \infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{-2x^{\,2} - 1}{3\,(\,x^2 + x - 2)} \right) = \infty \;;\; \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{-2x^{\,2} - 1}{3\,(\,x^2 + x - 2)} \right) = -\infty$$

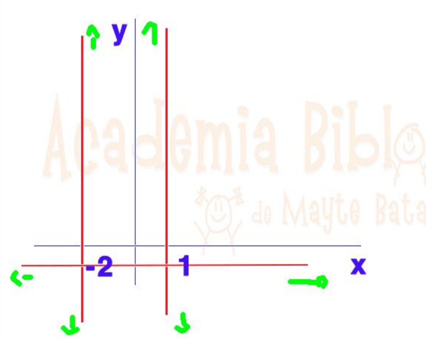
Tenemos asíntotas verticales en x=1 y x=-2

- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{-2x^{\,2} - \,1}{3\,(\,x^2 + x - 2)} \right) = -\frac{2}{3} \;;\; \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-2x^{\,2} - \,1}{3\,(\,x^2 + x - 2)} \right) = -\frac{2}{3}$$

Tiene una asíntota horizontal en y= $-\frac{2}{3}$

- Asíntota oblicua: No tiene (asíntota horizontal y oblicua son excluyentes)



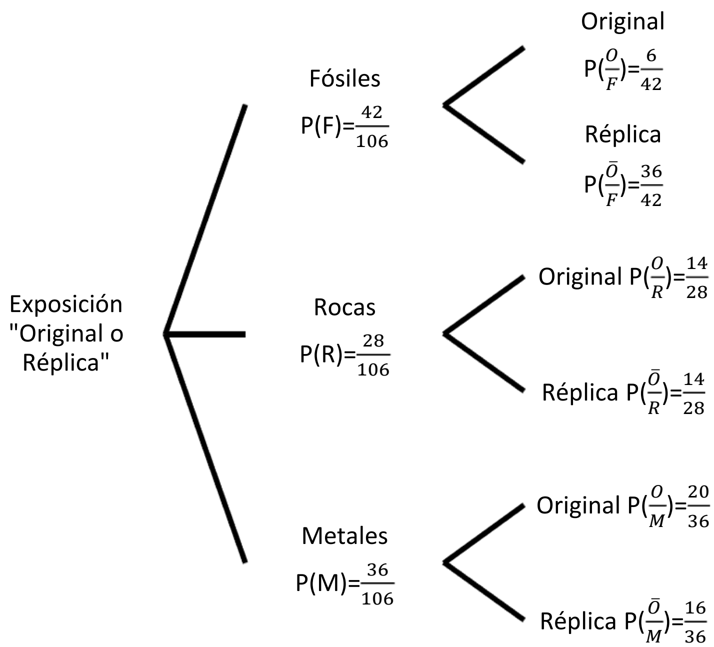
(Esbozo de la gráfica)

Volver

6.4 Probabilidad

6.4.1 Probabilidad Junio 2017

Elaboramos un diagrama de árbol que siempre ayuda a la reSolución del problema.



También podíamos haber hecho una tabla de contingencia

	Original	**Réplica**	**Totales**
Fósiles	6	36	**42**
Rocas	14	14	**28**
Metales	20	16	**36**
Totales	**40**	**66**	**106**

(a) Si escogemos al azar una pieza de la exposición, ¿cuál es la probabilidad de que sea un metal?

1. Siguiendo el árbol.

$$\mathrm{P}(M \cap O) = \frac{36}{106} * \frac{20}{36} = \frac{20}{106} = 0.1887 \rightarrow 18.87\%$$

2. Leyendo la tabla y aplicando Laplace (*casos favorables entre casos posibles*)

$$\mathrm{P}(M \cap O) = \frac{20}{106} = 0.1887 \rightarrow 18.87\%$$

(b) Si escogemos al azar una pieza de la exposición, ¿cuál es la probabilidad de que sea replica?

1. Siguiendo el árbol (teorema de la probabilidad total)

P($\overline{O}$)= $P(F \cap \overline{O}) + P(R \cap \overline{O}) + P(M \cap \overline{O}) = P(F) \cdot P\left(\frac{\overline{O}}{F}\right) + P(R) \cdot P\left(\frac{\overline{O}}{R}\right) + P(M) \cdot P\left(\frac{\overline{O}}{M}\right) = \frac{42}{106} \cdot \frac{36}{42} + \frac{28}{106} \cdot \frac{14}{28} + \frac{36}{106} \cdot \frac{16}{36} = \frac{66}{106} = 0.6226 \rightarrow 62.26\%$

2. Leyendo la tabla y aplicando Laplace.

P(R)= $\frac{total\ de\ réplicas}{total\ de\ piezas} = \frac{66}{106} = 0.6226 \rightarrow 62.26\%$

(c) Si escogemos al azar una pieza de la exposición y es una replica, ¿cuál es la probabilidad de que sea un fósil?

1. Aplicando el Teorema de Bayes

$$P\left(\frac{F}{\overline{\overline{O}}}\right) = \frac{P(F \cap \overline{O})}{P(F \cap \overline{O}) + P(R \cap \overline{O}) + P(M \cap \overline{O})} = \frac{\frac{42}{106} \cdot \frac{36}{42}}{\frac{42}{106} \cdot \frac{36}{42} + \frac{28}{106} \cdot \frac{14}{28} + \frac{36}{106} \cdot \frac{16}{36}} = \frac{\frac{36}{106}}{\frac{66}{106}} = \frac{36}{66} = 0.\overline{54}$$

Es decir, el 54.54%

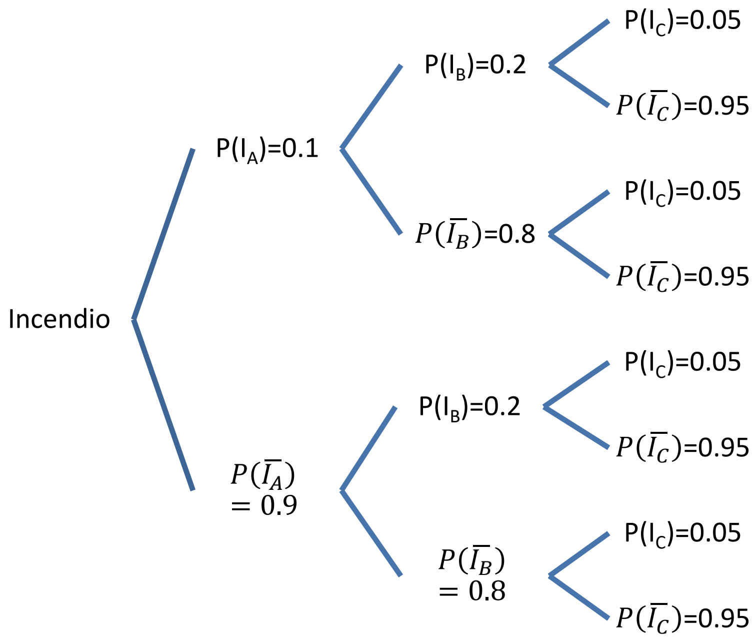
2. Leyendo la tabla y aplicando Laplace

$P\left(\frac{F}{\overline{O}}\right) = \frac{total\ de\ fósiles\ que\ son\ réplicas}{total\ de\ réplicas} = \frac{36}{66} = 0.\overline{54}$

Volver

6.4.2 Probabilidad Julio 2017

Elaboramos un diagrama de árbol que siempre ayuda a la reSolución del problema.



(a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ningún incendio?

Seguimos el árbol:

- $P(\overline{I_A} \cap \overline{I_B} \cap \overline{I_C}) = 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.95 = 0.684 \rightarrow$ **68.4 %**

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente dos incendios?

Seguimos las ramas que nos llevan a dos incendios

- $P(I = 2) = P(I_A \cap I_B \cap \overline{I_C}) + P(I_A \cap \overline{I_B} \cap I_C) + P(\overline{I_A} \cap I_B \cap I_C) = 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.95 + 0.1 \cdot 0.8 \cdot 0.05 + 0.90 \cdot 0.2 \cdot 0.05 = 0.032 \rightarrow$ **3.2 %**

(c) Si se sabe que ha habido solo un incendio, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en la zona A?

Aplicaremos el Teorema de Bayes.

Calculo aparte la probabilidad de que haya solo un incendio.

$$P(I = 1) = P(I_A \cap \overline{I_B} \cap \overline{I_C}) + P(\overline{I_A} \cap I_B \cap \overline{I_C}) + P(\overline{I_A} \cap \overline{I_B} \cap I_C)$$
$$= 0.1 \cdot 0.8 \cdot 0.95 + 0.9 \cdot 0.2 \cdot 0.95 + 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.05 = 0.283$$

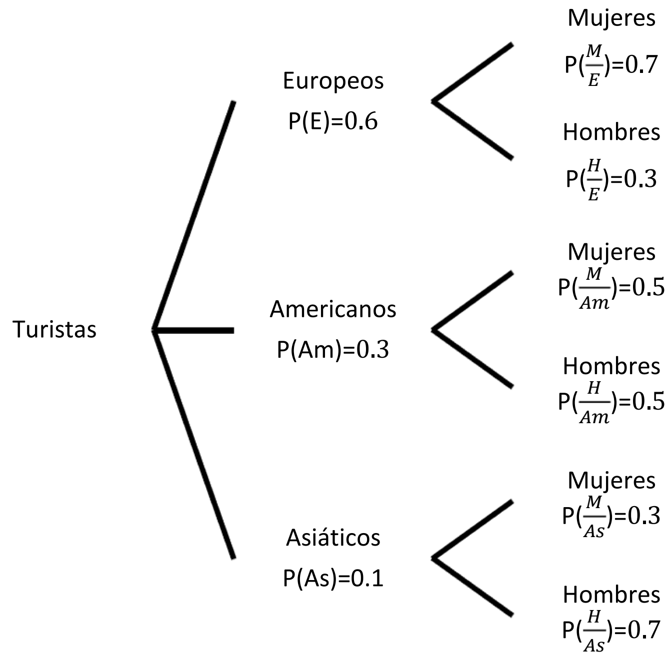
$$P\left(\frac{I_A}{I=1}\right) = \frac{P(I_A \cap \overline{I_B} \cap \overline{I_C})}{P(I_A \cap \overline{I_B} \cap \overline{I_C}) + P(\overline{I_A} \cap I_B \cap \overline{I_C}) + P(\overline{I_A} \cap \overline{I_B} \cap I_C)} = \frac{0.1 \cdot 0.8 \cdot 0.95}{0.1 \cdot 0.8 \cdot 0.95 + 0.9 \cdot 0.2 \cdot 0.95 + 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.05} = 0.2686$$

Por tanto, la probabilidad es del 26.86%

Volver

6.4.3 Probabilidad Junio 2018

Elaboramos un diagrama de árbol siempre ayuda a la reSolución del problema.



(a) Si se selecciona un turista al azar, ¿cuál es la probabilidad de quo sea una mujer americana?

- $P(Am \cap M) = P(Am) \cdot P(\frac{M}{Am}) = 0.3 \cdot 0.5 = 0.15 \rightarrow \mathbf{15\%}$

(b) Si se selecciona un turista al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

- Siguiendo el árbol (teorema de la probabilidad total)

$P(M) = P(E \cap M) + P(Am \cap M) + P(As \cap M) = P(E) \cdot P\left(\frac{M}{E}\right) + P(Am) \cdot P\left(\frac{M}{Am}\right) + P(As) \cdot P\left(\frac{M}{As}\right) = 0.6 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.3 = 0.6 \rightarrow \mathbf{60\%}$

(c) Si nos dicen que se ha seleccionado un turista y es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que sea europea?

- Aplicando el Teorema de Bayes

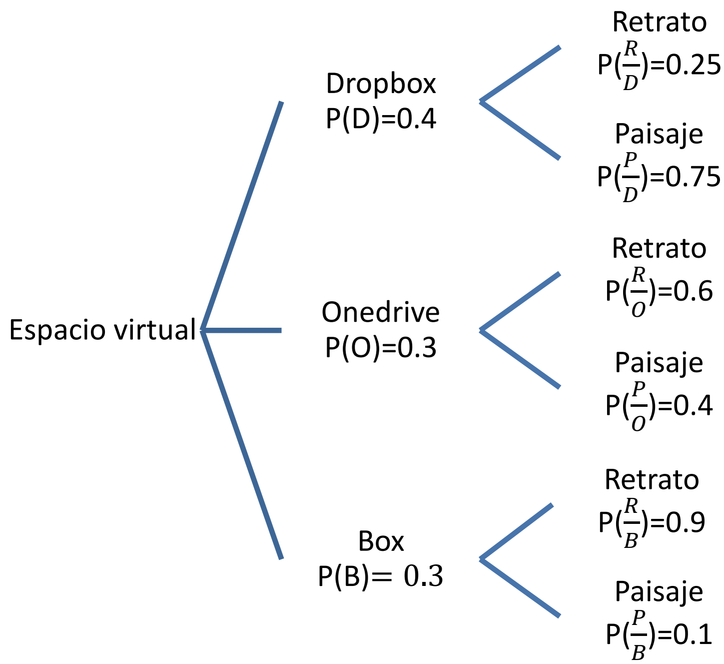
$$P\left(\frac{E}{M}\right) = \frac{P(E \cap M)}{P(E \cap M) + P(Am \cap M) + P(As \cap M)} = \frac{0.6 \cdot 0.7}{0.6 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.3} = 0.7$$

Por tanto, la probabilidad es del 70%

Volver

6.4.4 Probabilidad Julio 2018

Elaboramos un diagrama de árbol que siempre ayuda a la reSolución del problema.



(a) Si escoge una imagen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea retrato?

Siguiendo el árbol (teorema de la probabilidad total)

- P(R)= $P(D\cap R)+P(O\cap R)+P(B\cap R)=P(D)\cdot P\left(\frac{R}{D}\right)+P(O)\cdot P\left(\frac{R}{O}\right)+P(B)\cdot$
  $P\left(\frac{R}{B}\right)=0.4\cdot 0.25+0.3\cdot 0.6+0.3\cdot 0.9=0.55\rightarrow \mathbf{55\%}$

(b) Si escoge una imagen al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que sea paisaje y este en Box?

- $P(B\cap P)=P(B)\cdot P\left(\frac{P}{B}\right)=0.3\cdot 0.1=0.03\rightarrow \mathbf{3\%}$

(c) Si escoge una imagen al azar y es paisaje, ¿Cuál es la probabilidad de que este en Onedrive?

Aplicando el Teorema de Bayes

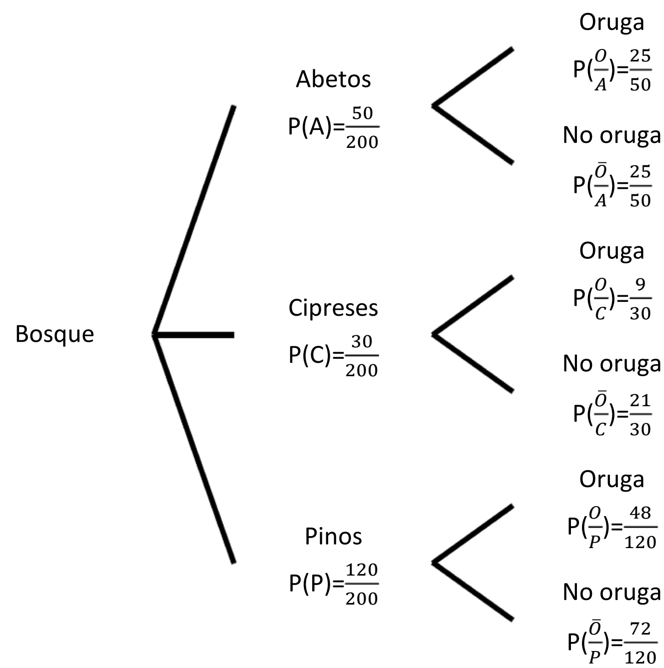
- $P\left(\frac{O}{P}\right)=\frac{P(O\cap P)}{P(D\cap P)+P(O\cap P)+P(B\cap P)}=\frac{0.3\cdot 0.4}{0.4\cdot 0.75+0.3\cdot 0.4+0.3\cdot 0.1}=\frac{0.12}{0.45}=0.2\overline{6}$

Por tanto, la probabilidad es del 26.67%

Volver

6.4.5 Probabilidad Junio 2019

Elaboramos un diagrama de árbol que siempre ayuda a la reSolución del problema.



También podíamos haber hecho una tabla de contingencia

	Infectado Oruga	No infectado oruga	Totales
Abetos	25	25	**50**
Cipreses	9	21	**30**
Pinos	48	72	**120**
Totales	**82**	**118**	**200**

(a) Calcular la probabilidad de que un pino elegido al azar este infectado por la oruga.

1. Siguiendo el árbol. (Teorema de la probabilidad condicionada)

- $P(\frac{O}{P}) = \frac{48}{120} = 0.4 \rightarrow$ **40 %**

2. Leyendo la tabla y aplicando Laplace (*casos favorables entre casos posibles*)

- $P(\frac{O}{P}) = \frac{Pinos\ infectados\ por\ la\ oruga}{total\ de\ pinos} = 0.4 \rightarrow$ **40%**

(b) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar este infectado por la oruga.

1. Siguiendo el árbol (teorema de la probabilidad total)

- P(I)= $P(A \cap I) + P(C \cap I) + P(P \cap I) = P(A) \cdot P\left(\frac{I}{A}\right) + P(C) \cdot P\left(\frac{I}{C}\right) + P(P) \cdot P\left(\frac{P}{C}\right) =$ $\frac{50}{200} \cdot \frac{25}{50} + \frac{30}{200} \cdot \frac{9}{30} + \frac{120}{200} \cdot \frac{48}{120} = \frac{82}{200} = 0.41 \rightarrow \mathbf{41\%}$

2. Leyendo la tabla y aplicando Laplace.

- P(I)= $\frac{total\ de\ \text{árboles}\ infectados\ por\ la\ oruga}{total\ de\ \text{árboles}} = \frac{82}{200} = 0.41 \rightarrow \mathbf{41\%}$

(c) Si se selecciona un árbol al azar y está infectado por la. oruga, ¿cuál es la probabilidad de que sea un pino?

1. Aplicando el Teorema de Bayes

- $P\left(\frac{P}{\text{I}}\right) = \frac{P(P \cap I)}{P(A \cap I) + P(C \cap I) + P(P \cap I)} = \frac{\frac{120}{200} \cdot \frac{48}{120}}{\frac{50}{200} \cdot \frac{25}{50} + \frac{30}{200} \cdot \frac{9}{30} + \frac{120}{200} \cdot \frac{48}{120}} = \frac{\frac{48}{200}}{\frac{82}{106}} = \frac{48}{82} = 0.\overline{58536}$

2. Leyendo la tabla y aplicando Laplace

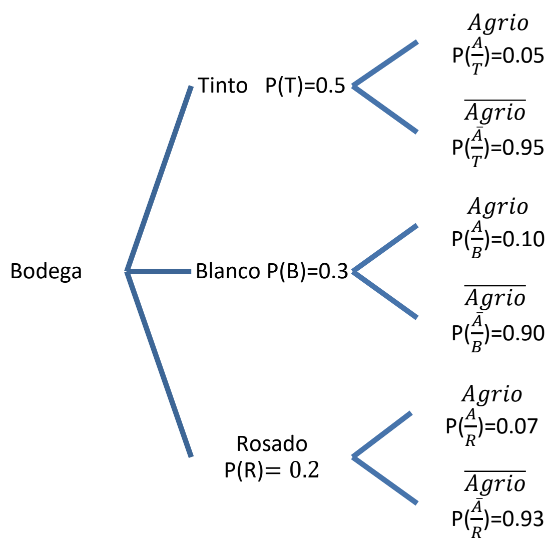
- $P\left(\frac{P}{\text{I}}\right) = \frac{total\ de\ pinos\ infectados\ por\ la\ oruga}{total\ de\ infectados\ por\ la\ oruga} = \frac{48}{82} = 0.\overline{58536}$

Es decir, el 58.54%

Volver

6.4.6 Probabilidad Julio 2019

Elaboramos un diagrama de árbol que siempre ayuda a la reSolución del problema.



(a) Calcular la probabilidad de que una barrica elegida al azar contenga vino blanco y que además dicho vino esté agrio.

Siguiendo el árbol

- $P(B \cap A) = P(B) \cdot P\left(\frac{A}{B}\right) = 0.3 \cdot 0.1 = 0.03 \to$ **3%**

(b) Calcular la probabilidad de que una barrica de vino tinto contenga vino con buen sabor.

Leyendo directamente el árbol (teorema de la probabilidad condicionada)

- $P(\frac{\bar{A}}{T})=0.95 \to$ **95%**

(c) Si se selecciona al azar una barrica y el vino está agrio, ¿cuál es la probabilidad de que contenga vino tinto?

Aplicando el Teorema de Bayes

- $P\left(\frac{T}{A}\right) = \frac{P(T \cap A)}{P(T \cap A)+P(B \cap A)+P(R \cap A)} = \frac{0.5 \cdot 0.05}{0.5 \cdot 0.05+0.3 \cdot 0.1+0.2 \cdot 0.07} = 0.3623$

Por tanto, la probabilidad es del 36.23%

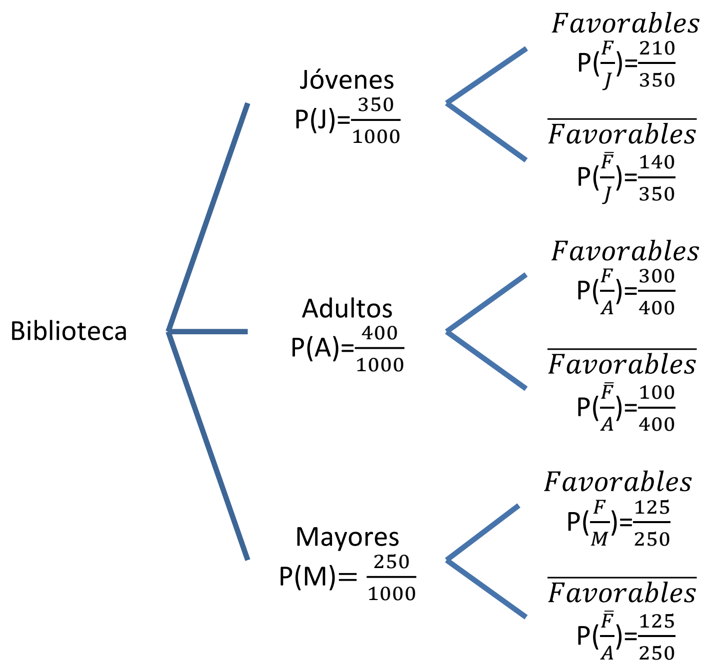
Volver

6.4.7 Probabilidad Junio 2020

Elaboramos una tabla de contingencia con los datos del problema:

	Favorables	No favorables	Totales
Jóvenes	210	140	**350**
Adultos	300	100	**400**
Mayores	125	125	**250**
Totales	**635**	**365**	**1000**

O bien, un diagrama de árbol que siempre ayuda a la resolución del problema.



(a) Calcular la probabilidad de que un adulto sea contrario a la puesta en marcha del servicio.

1. Teorema de la probabilidad condicionada

- $P\left(\frac{\bar{F}}{A}\right) = \frac{100}{400} = 0.25 \rightarrow \mathbf{25\%}$

2. Directamente leyendo la tabla y aplicando Laplace

- P($\frac{\bar{F}}{A}$)= $\frac{total\ de\ adultos\ contrarios\ a\ la\ propuesta}{total\ de\ adultos}$=$\frac{100}{400}$ $= 0.25 \rightarrow$**25%**

(b) Calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar sea favorable a la puesta en marcha del servicio.

1. Siguiendo el árbol (teorema de la probabilidad total)

- P(F)= $P(J \cap F) + P(A \cap F) + P(M \cap F) = P(J) \cdot P\left(\frac{F}{J}\right) + P(A) \cdot P\left(\frac{F}{A}\right) + P(M) \cdot P\left(\frac{F}{M}\right) =$ $\frac{350}{1000} \cdot \frac{210}{350} + \frac{400}{1000} \cdot \frac{300}{400} + \frac{250}{1000} \cdot \frac{125}{250} = \frac{635}{1000} = 0.635 \rightarrow \mathbf{63.5\%}$

2. Directamente con la tabla y aplicando Laplace

- P(F)= $\frac{total\ de\ personas\ favorables}{total\ de\ personas}$=$\frac{635}{1000}$ $= 0.635 \rightarrow$**63.5%**

[Volver]

6.5 Estadística

6.5.1 Estadística Junio 2017

$\hat{p} = \frac{28}{95}$ n=95

(a) Intervalo de confianza al 95%

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.960$$

Como n es menor que 100 entonces empleamos la fórmula:

$$(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4n}})$$

$$(\frac{28}{95} - 1.960 \cdot \sqrt{\frac{1}{380}}, \frac{28}{95} + 1.960 \cdot \sqrt{\frac{1}{380}})$$

(0.1942,0.3953)

(b) Tamaño = 2·Error

0.1=2 · Error

Error = 0.1 / 2 = 0.05

Despejamos n de la fórmula del error:

$$\text{Error} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$$

Despejamos n y tenemos

$$n \geq \frac{1}{Error^2} z_{\frac{\alpha}{2}}{}^2 \cdot \hat{p} \cdot (1 - \hat{p})$$

$$n \geq \frac{1}{0.05^2} \cdot 1.960^2 \cdot \frac{28}{95} \cdot \left(1 - \frac{28}{95}\right) = 319.42$$

Debe seleccionar 320 tiendas

Volver

6.5.2 Estadística Julio 2017

N(μ, 0.1)

(a) Calculamos la media muestral (sumamos todos los datos y dividimos entre el número de datos) $\bar{x} = 0.383$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.576$$

Calculamos el intervalo de confianza aplicando la fórmula:

$$(0.383\text{-}2.576\cdot\frac{0.1}{\sqrt{10}}\ ,\ 0.383\text{+}2.576\cdot\frac{0.1}{\sqrt{10}})$$

$$(0.3015{,}0.4645)$$

(b) Tamaño = 2 Error $\rightarrow$ Error = 0.05

Error = $z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Despejamos n

n $\geq (z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{Error})^2$

n$\geq (2.576 \cdot \frac{0.1}{0.05})^2$=26.54

Debe seleccionar al menos 27 protectores

6.5.3 Estadística Junio 2018

N(μ, 2)

(a) $\bar{x} = 78$; n=37 ; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.960$

Calculamos el intervalo de confianza aplicando la fórmula:

$$(78\text{-}1.960\cdot\frac{2}{\sqrt{37}}\ ,\ 78\text{+}1.960\cdot\frac{2}{\sqrt{37}}) \rightarrow (77.36{,}78.64)$$

(b) Tamaño = 2 $Error$ $\rightarrow$ $Error$ = 0.25

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Despejamos n $\rightarrow$ n $\geq (z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{Error})^2 \rightarrow$ n$\geq (1.96 \cdot \frac{2}{0.25})^2 \rightarrow$ n$\geq$ 245.8624

El tamaño muestral debe ser de 246 zonas

6.5.4 Estadística Julio 2018

(a) Estamos ante un muestreo estratificado con afijación proporcional:

Tenemos en total 5000 hogares y queremos una muestra de 400 por tanto

$$\frac{400}{5000} = \frac{n_1}{800} = \frac{n_2}{2000} = \frac{n_3}{1200} = \frac{n_4}{1000}$$

$\frac{400}{5000} \cdot 800 = n_1 \rightarrow n_1 = 64 \rightarrow$ *64 hogares del barrio A*

$\frac{400}{5000} \cdot 2000 = n_2 \rightarrow n_1 = 160 \rightarrow$ *160 hogares del barrio B*

$\frac{400}{5000} \cdot 1200 = n_3 \rightarrow n_3 = 96 \rightarrow$ *96 hogares del barrio C*

$\frac{400}{5000} \cdot 1000 = n_4 \rightarrow n_1 = 80 \rightarrow$ *80 hogares del barrio D*

(b) $\hat{p} = \frac{64}{160} = 0.4$

(c) Como n≥100 empleamos la fórmula

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.960$$

(0.4-1.96$\cdot\sqrt{\frac{0.4\cdot(1-0.4)}{160}}$, 4+1.96$\cdot\sqrt{\frac{0.4\cdot(1-0.4)}{160}}$)

(0.324,0.476)

6.5.5 Estadística Junio 2019

N$(\mu, 24)$

(a) $\bar{x} = 36$; n=100 ; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.960$

Calculamos el intervalo de confianza aplicando la fórmula:

$$(36\text{-}1.960\cdot\frac{24}{\sqrt{100}}\ ,\ 36\text{+}1.960\cdot\frac{24}{\sqrt{100}}) \rightarrow (31.296, 40.704)$$

(b) Tamaño = 2 $Error$ $\rightarrow$ $Error$ = 2,5

$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Despejamos n → $n \geq (z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{Error})^2$ → n≥ $(1.96 \cdot \frac{24}{2.5})^2$ → n≥ 354.04

El tamaño muestral debe ser de 355 clientes

Volver

6.5.6 Estadística Julio 2019

(a) Estamos ante un muestreo estratificado con afijación proporcional:

Tenemos en total 5000 hogares y queremos una muestra de 400 por tanto

$$\frac{500}{10000} = \frac{n_1}{5000} = \frac{n_2}{3000} = \frac{n_3}{2000}$$

$\frac{500}{10000} \cdot 5000 = n_1 \to n_1 = 64 \to$ *250 conductores de antigüedad superior a diez años*

$\frac{500}{10000} \cdot 3000 = n_2 \to n_1 = 160 \to$ *150 conductores de antigüedad entre tres y diez años*

$\frac{500}{10000} \cdot 2000 = n_3 \to n_3 = 96 \to$ *100 conductores de antigüedad inferior a tres años*

(b) N$(\mu, 0.3)$

$\bar{x} = 1.2$; n=100 ; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.960$

Calculamos el intervalo de confianza aplicando la fórmula:

$$(1.2\text{-}1.960 \cdot \frac{0.3}{\sqrt{100}} , 1.2+1.960 \cdot \frac{0.3}{\sqrt{100}}) \to (1.141,1.259)$$

Volver

6.5.7 Estadística Junio 2020 – Problema 1

N$(\mu, 72)$

$\bar{x} = 800$; n=36 ; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.960$

Calculamos el intervalo de confianza aplicando la fórmula:

$$(800\text{-}1.960 \cdot \frac{72}{\sqrt{36}} , 800+1.960 \cdot \frac{72}{\sqrt{36}}) \to (776.48,823.52)$$

Volver

6.5.8 Estadística Junio 2020 – Problema 2

$N(\mu, 400)$

$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.960$

Tamaño = 2 $Error$ → $Error$ = Tamaño / 2 → $Error = 80$

$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Despejamos n → $n \geq (z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{Error})^2$ → $n \geq (1.96 \cdot \frac{400}{80})^2$ → $n \geq 96.04$

Hemos de seleccionar a 97 familias

Volver